INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Curso de Termodinâmica-GFI 04116

1º semestre de 2011

Prof. Jürgen Stilck

Solução da 2ª Prova

Questão 1

a) Temos, da segunda equação de estado, que:

$$[B] = \frac{N}{m^2K^2} = \frac{kg\,m}{s^2m^2K^2} = \frac{kg}{ms^2K^2}.$$

b) $p = u/v = BT^2$, daí vem

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{Bv}{u}\right)^{1/2}.$$

A segunda equação de estado é:

$$\frac{p}{T} = \frac{u}{v}\left(\frac{Bv}{u}\right)^{1/2},$$

o que leva a:

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{Bu}{v}\right)^{1/2}.$$

Integrando a partir de um estado fiducial (u_0, v_0), vem:

$$s_1 - s_0 = \int_{(u_0,v_0)}^{(u_1,v_0)} \frac{du}{T} + \int_{(u_1,v_0)}^{(u_1,v_1)} \frac{p\,dv}{T} =$$

$$(Bv_0)^{1/2}\int_{u_0}^{u_1} u^{-1/2}du + (bu_1)^{1/2}\int_{v_0}^{v_1} v^{-1/2}dv =$$
$$2[(Bu_1v_1)^{1/2} - (Bu_0v_0)^{1/2}].$$

Então, a menos de uma constante, que por simplicidade consideramos nula, teremos $s(u,v) = 2(Buv)^{1/2}$.

c) A energia interna será:

$$u = \frac{s^2}{4Bv}.$$

Então:

$$f = u - Ts = \frac{s^2}{4Bv} - Ts.$$

Mas:

$$T = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{s}{2Bv},$$

logo $s = 2TBv$, o que substituido na expressão para f resulta em $f = -T^2Bv$.

Questão 2

a) Temos:

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v =$$
$$T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T.$$

Usando uma relação de Maxvell na representação da energia livre de Helmholtz, vem:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v,$$

logo:

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v.$$

b) para um gás ideal, $pv = RT$, então:

$$p = \frac{RT}{v},$$

logo

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v = \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = 0,$$

e, portanto, c_v pode depender apenas de T.

c) Da equação de estado dada, temos:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2 T},$$

daí vem:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v = -\frac{2a}{v^2 T^3},$$

e:

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = -\frac{2a}{v^2 T^2}$$

d)

$$c_v = \frac{3R}{2} + \int_\infty^v \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T dv =$$

$$\frac{3R}{2} - \frac{2a}{T^2}\int_\infty^v \frac{dv}{v^2} = \frac{3R}{2} + \frac{2a}{vT^2}.$$

Questão 3

a) Temos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \ell}\right)_T = -T\left(\frac{\partial s}{\partial \ell}\right)_T + f.$$

Vamos usar uma relação de Maxwell na representação da energia livre de Helmholtz $\phi(T,\ell)$:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \ell}\right)_T = -\frac{\partial}{\partial \ell}\frac{\partial \phi}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial \phi}{\partial \ell} = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\ell,$$

o que nos leva a:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \ell}\right)_T = -T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\ell + f.$$

b) Da equação de estado, obtemos $f = \frac{T}{c}(\ell - \ell_0)$, logo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\ell = \frac{f}{T}$$

e, portanto,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \ell}\right)_T = -T\frac{f}{T} + f = 0,$$

implicando $u = u(T)$.

c) De própria equação de estado, vem:

$$\ell_f = \ell_i - cf\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_f}\right) = \ell_i - \frac{cf}{T_i T_f}(T_f - T_i).$$

d) precisamos determinar a derivada:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_s = -\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial f}\right)_T}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_f} =$$

$$-\frac{T\left(\frac{\partial s}{\partial f}\right)_T}{c_f},$$

onde c_f é o calor específico à tensão constante. Para reduzir a derivada restante, usamos uma relação de Maxwell na representação da energia livre de Gibbs $g(T, f)$, com $dg = -s\,dT - \ell\,df$:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial f}\right)_T = \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_f.$$

Da equação de estado, obtemos:

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_f = -\frac{cf}{T^2},$$

e, portanto,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_s = \frac{cf}{Tc_f}.$$

Assim, para um acréscimo relativamento pequeno da tensão, podemos estimar:

$$\delta T \approx \frac{cf}{Tc_f}\delta f.$$